ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

16.02.16

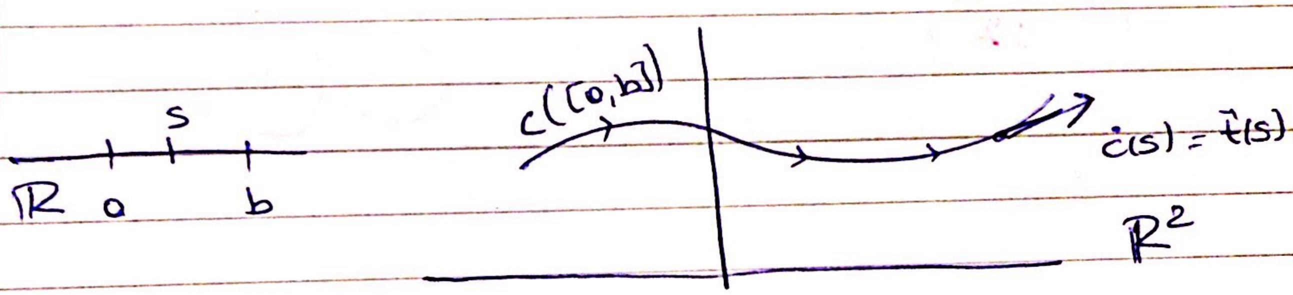
Συγγράμματα:

1) Κουτρουφιώτης : Στοιχειώδη Διαφ. Γεωμετρία
2) B.O. Nell : " " "
3) A. Pressely : " " "
4) M. do Carmo : Differential geometry of curves and surfaces

+ Παρασκευή 12:00 - 13:30 (για 3 εβδομάδες)

Καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$

Έστω $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ κανονική. Υποθέτω ότι οι καμπύλες που έχουν παράμετρο το μήκος τόξου s.



$c(s)=(x(s),y(s))$

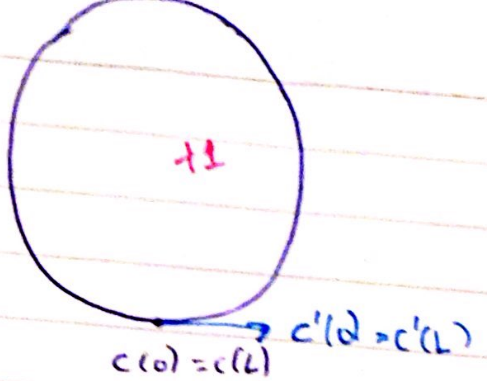
Το διάνυσμα ταχύτητας ή εφαπτόμενο διάνυσμα είναι:

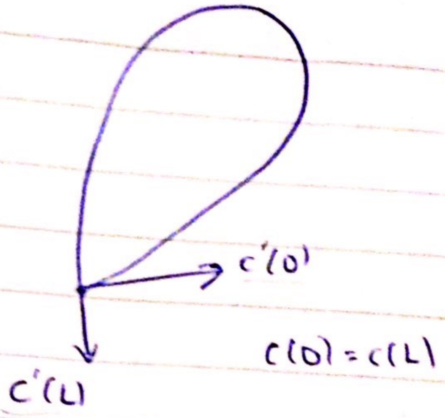
$$\dot{c}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))$$

Καμπυλότητα: $K=\dfrac{d\varphi}{ds}$

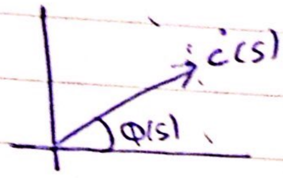
$\dot{c}(s)=(\cos\phi(s),\sin\phi(s))$

Αν c είναι C^2 τότε η K είναι C^0



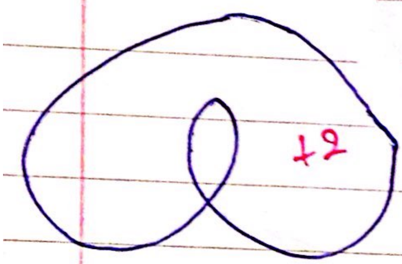


Θέλω αυτό ↑ και όχι αυτό ↑

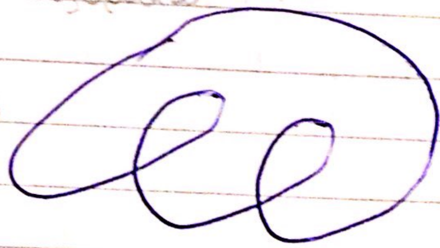


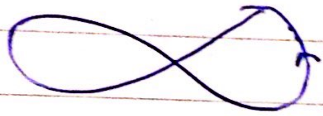
$\varphi(0) = 0$

$\varphi(L) = 2\pi$



το πρόσημο εξαρτάται από τον προσανατολισμό





Αυτός ο αριθμός εξαρτάται από τις αυτοτομές.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη C^1 με παράμετρο το μήκος τόξου. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) \quad , \forall s \in [a,b].$$

Επιπλέον,

(i) Αν φ_1, φ_2 είναι δύο τέτοιες γωνιακές συναρτήσεις, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $\varphi_2(s) = \varphi_1(s) + 2k\pi$, $\forall s$

(ii) Η συνάρτηση φ καθορίζεται πλήρως από την τιμή της σε κάποιο $s_0 \in [a,b]$.

(iii) Η μεταβολή (της γωνίας) $\phi(b)-\phi(a)$ εξαρτάται μόνο από τη c. → δηλ. είναι ανεξάρτητη της γωνιακής συνάρτησης

Απόδειξη

(i) Έστω ότι υπάρχουν συνεχείς $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\dot{c}(s) = (\cos\phi_1(s), \sin\phi_1(s)) = (\cos\phi_2(s), \sin\phi_2(s)) \quad \forall s$$

$$\Rightarrow \exists\, k(s) \in \mathbb{Z} : \quad \phi_2(s) = \phi_1(s) + \underbrace{2k(s)\pi}_{\text{πρέπει ν.δ.ο. είναι σταθερό}}$$

$k(s) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\phi_2(s) - \phi_1(s)\right) \Rightarrow k(s)$ $\underline{\text{συνεχής συνάρτηση στο } [a,b]}$ $\underline{\text{που λαμβάνει τιμές ακέραιες}}$

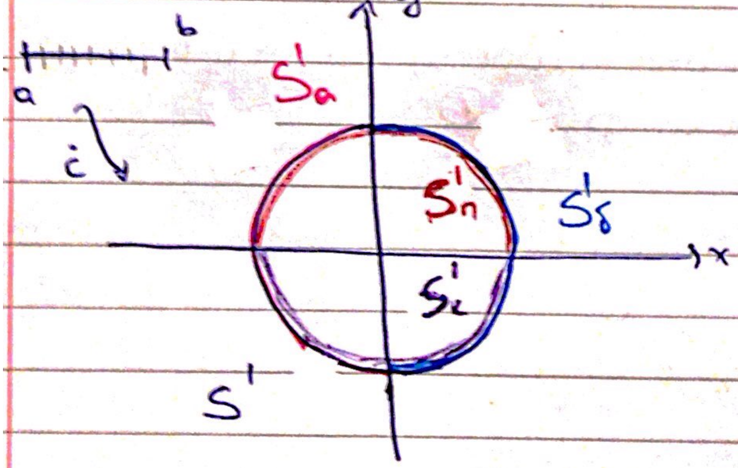
$\Rightarrow k(s)$ είναι σταθερή

(ii) εάν

$$\left.\begin{array}{l} \phi_2(s_0) = \phi_1(s_0) \\ \phi_2(s) - \phi_1(s) = 2k\pi \quad \forall s \end{array}\right\} \Rightarrow k=0 \Rightarrow \phi_2(s) = \phi_1(s) \quad \forall s$$

(iii)
$$\phi_2(b) - \phi_2(a) = (\phi_1(b) + 2k\pi) - (\phi_1(a) + 2k\pi) = \phi_1(b) - \phi_1(a)$$

Ύπαρξη $\quad \overbrace{\dot{c} : [a,b]}^{\text{συνεχής αφού η } c\ C^1} \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$



$S^1_\delta = \{(x,y) \in S^1 \mid x>0\}$

$S^1_\alpha = \{(x,y) \in S^1 \mid x<0\}$

$S^1_\pi = \{(x,y) \in S^1 / y>0\}$

$S^1_\kappa = \{(x,y) \in S^1 / y<0\}$

$S^1 = S^1_\delta \cup S^1_\alpha \cup S^1_\pi \cup S^1_\kappa$

Περίπτωση Ι: Έστω ότι $\dot{c}([a,b]) \subset S_1$

$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

δηλ. $\dot{x}(s) > 0 \ \forall s \in I \in [a,b]$

Ορίζω $\phi : I \to \mathbb{R}$ με $\phi(s) = \arctan \dfrac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)} + 2k\pi$

Προφανώς η ϕ πληροί την

$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s)) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

πρώτα κάνουμε αυτό και μετά γράφω

$$\left.\begin{array}{l}\cos\phi(s) = \dot{x}(s)\\ \sin\phi(s) = \dot{y}(s)\end{array}\right\} \Rightarrow \tan\phi(s) = \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}$$

Περίπτωση ΙΙ: Έστω ότι $\dot{c}([a,b])$ δεν περιέχεται σε κανένα από τα ημικύκλια.

Λόγω συνέχειας θεωρώ διαμέριση $\{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ ώστε $\dot{c}([t_i, t_{i+1}])$ να περιέχεται σε ένα από τα ημικύκλια.

$[t_0, t_1] = [a, t_1]$

Υπάρχει συνεχής γωνιακή συνάρτηση $\phi_1 : [a, t_1] \to \mathbb{R}$ μοναδική με δεδομένο $\phi_1(a)$ ⊛

$$\phi(s) = \begin{cases} \phi_1(s), & s \in [t_0, t_1] \\ \phi_2(s), & s \in [t_1, t_2] \\ \phi_3(s), & s \in [t_2, t_3] \\ \vdots \end{cases}$$

Πρέπει να διαλέξω τη ϕ_2 ώστε να έχω συνέχεια στο t_1.

⊛ Ομοίως υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\phi_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ με $\phi_2(t_1) = \phi_1(t_1)$.

ώστε να μην έχω πρόβλημα συνέχειας

Ομοίως $\phi_3(t_2) = \phi_2(t_2)$

ΛΗΜΜΑ Έστω $F : [a,b] \to S^1$ συνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε:

$$F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x)) \quad \forall x \in [a,b]$$

$F(x) = (u(x), v(x))$

$u^2(x) + v^2(x) = 1 \quad \forall x$

Κλειστές Καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια λεία C^k, $k \geq 1$ καμπύλη $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Η c καλείται κλειστή αν-ν είναι περιοδική με περίοδο L (και παράμετρο το μήκος τόξου).

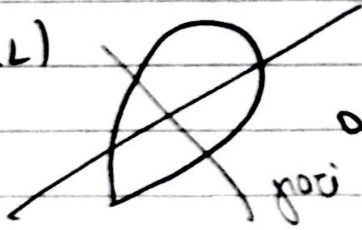
$c(s+L) = c(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$, $(*)$

Όλη η πληροφορία βρίσκεται στο διάστημα $[0,L]$.

$$L\left(c\big|_{[0,L]}\right) = \int_0^L \|\dot{c}(s)\|\, ds = \int_0^L 1\, ds = L$$

$(*) \Rightarrow \dot{c}(s+L) = \dot{c}(L) \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$



όχι κλειστή

γιατί θέλω μου κλειστότητα αλλά με λείο τρόπο

Αριθμός Περιστροφής για Κλειστές Καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κλειστή καμπύλη με περίοδο $L>0$. Ο αριθμός

$$n_c = \frac{\phi(L)-\phi(0)}{2\pi}$$

καλείται αριθμός περιστροφής της c.

Συμπέρασμα: $n_c \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s)) \\ \dot{c}(s+L) = (\cos(s+L), \sin(s+L)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\dot{c}(s) = \dot{c}(s+L)} \exists\, m(s) \in \mathbb{Z} : \phi(s+L) = \phi(s) + 2m(s)\pi$$

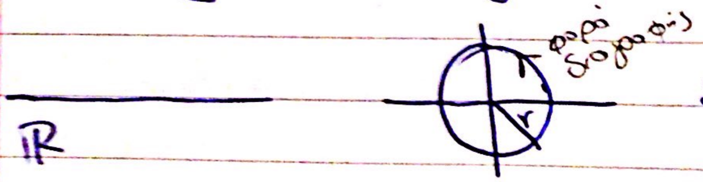
$$\Rightarrow m(s) = \frac{\phi(s+L)-\phi(s)}{2\pi}$$

$$\Rightarrow m(s) = m : \text{ανεξάρτητο του } s$$

$$\boxed{\phi(s+L) - \phi(s) = 2m\pi \quad \forall s}$$

$\phi(L) - \phi(0) = 2m\pi.$

Παράδειγμα: (Υπολογισμός του n_c)



$S_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = r^2\}$

$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$

$c'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$\|c'(t)\| = r$

Το μήκος τόξου είναι:

$$s = s(t) = \int_0^t \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_0^t r \, d\sigma = rt \Rightarrow t = \frac{s}{r}$$

Η αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου είναι η $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

Εύρεση γωνιακής συνάρτησης:

$$\dot{c}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Άρα η γωνιακή συνάρτηση είναι: $\phi(s) = \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}$

Το μήκος κύκλου ξέρουμε ότι είναι: $L = 2\pi r$

Το υποψήφιο για περίοδο

$$\begin{aligned} c(s+L) &= c(s + 2\pi r) \\ &= \left(r\cos\frac{s+2\pi r}{r}, r\sin\frac{s+2\pi r}{r}\right) \\ &= \left(r\cos\left(\frac{s}{r} + 2\pi\right), r\sin\left(\frac{s}{r} + 2\pi\right)\right) \\ &= \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \\ &= c(s) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Η c είναι κλειστή με περίοδο $L = 2\pi r$.

Ο αριθμός περιστροφής είναι:

$$n_c = \frac{\phi(L) - \phi(0)}{2\pi}$$

$$= \frac{\phi(2\pi r) - \phi(0)}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \left(\frac{\cancel{2\pi r}}{\cancel{r}} + \frac{\pi}{\cancel{2}} - \frac{\pi}{\cancel{2}} \right)$$

$$= 1 \longrightarrow$$ ΠΡΟΣΟΧΗ! Πάντα πρέπει να βρίσκω ακέραιο! ΠΟΤΕ κλάσμα!

ΠΡΟΤΑΣΗ (Αριθμός περιστροφής και αναπαραμέτρησης)

Έστω $c, \tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου και περίοδο $L>0$, εκ των οποίων η $\tilde{c}$ είναι αναπαραμέτρηση της c.

(i) Αν η αναπαραμέτρηση διατηρεί τον προσανατολισμό τότε

$$n_{\tilde{c}} = n_c$$

(ii) Αν η αναπαραμέτρηση αντιστρέφει τον προσανατολισμό τότε

$$n_{\tilde{c}} = -n_c$$

Απόδειξη

$\tilde{c}(s) = c(f(s))$ όπου f λεία συνάρτηση.

$\dot{\tilde{c}}(s) = \dot{f}(s)\,\dot{c}(f(s)) \Rightarrow \|\dot{\tilde{c}}(s)\| = |\dot{f}(s)|\,\|\dot{c}(f(s))\|$

$\Rightarrow 1 = |\dot{f}(s)| \quad \forall s$

$\Rightarrow \dot{f}(s) = 1 \quad \forall s \quad$ ή $\quad \dot{f}(s) = -1 \quad \forall s$

$\Rightarrow f(s) = s + s_0 \quad \forall s \quad$ ή $\quad f(s) = -s + s_0 \quad \forall s$

η περίπτωση που διατηρείται ο προσανατολισμός

η περίπτωση που δεν διατηρείται

Για να συγκρίνω τους αριθμούς περιστροφής, πρέπει να συσχετίσω τις γωνιακές τους συναρτήσεις.

Για την $f(s) = s + s_0$:

Έστω $\phi(s)$ γωνιακή συνάρτηση της c, δηλ.

$$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$$

$$\dot{\tilde{c}}(s) = \dot{c}(s+s_0) = (\cos\phi(s+s_0), \sin\phi(s+s_0))$$

Οι καμπύλες έχουν κοινό μήκος και κοινή περίοδο

Μια γωνιακή συνάρτηση της $\tilde{c}$ είναι η $\tilde{\phi}(s) = \phi(s+s_0)$

$$n_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{\phi}(L) - \tilde{\phi}(0)}{2\pi} = \frac{\phi(L+s_0) - \phi(s_0)}{2\pi} = \frac{2n_c\pi}{2\pi} = n_c$$

Είχαμε πει: $\phi(s+L) = \phi(s) + 2m\pi$

$\forall s, \quad m = n_c$

Για την $f(s) = -s + s_0$:

$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$

$\dot{\tilde{c}}(s) = -\dot{c}(-s+s_0) = -(\cos\phi(-s+s_0), \sin\phi(-s+s_0)) =$

αφού είδαμε $\dot{\tilde{c}}(s) = \dot{f}(s)\,\dot{c}(f(s))$

$= (\cos(\phi(-s+s_0)+\pi), \sin(\phi(-s+s_0)+\pi))$

Προσθέτω π για να πάω στους αντίθετους τριγ. αριθμούς

Μια γωνιακή συνάρτηση για την $\tilde{c}$ είναι η $\tilde{\phi}(s) = \phi(-s+s_0)+\pi$

$$n_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{\phi}(L) - \tilde{\phi}(0)}{2\pi} = \frac{(\phi(s_0-L)+\pi) - (\phi(s_0)+\pi)}{2\pi} = \frac{\phi(s_0-L) - \phi(s_0)}{2\pi} = -\frac{2\pi n_c}{2\pi}$$

χρησιμοποιώ [illegible] με πριν, όμως τώρα την αλλάζω

Συνοψίζουμε:

· $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κλειστή με παράμετρο το μήκος τόξου και μήκος $L>0$.

$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$

αριθμός περιστροφής της c: $n_c = \dfrac{\phi(L)-\phi(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

Έστω η c είναι C^1 με καμπυλότητα $k(s) = \dfrac{d\phi}{ds}(s)$

$$\underbrace{\phi(L)-\phi(0) = \int_0^L \frac{d\phi}{ds}\, ds}_{} = \int_0^L k(s)\, ds$$

Υποψιάζομαι ότι από μια τέτοια διαφορά, μπορεί να γράψω μια μορφή ολοκληρώματος

$$n_c = \frac{\int_0^L k(s)\, ds}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\int_0^L k(s)\, ds = 2n_c\pi}$$

κι έτσι αποδείξαμε το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν c είναι κλειστή (C^2) καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και μήκος L, τότε ισχύει

$$\int_0^L k(s)\, ds = 2n_c\pi$$

→ Έτσι υπολογίζω το n_c χωρίς γωνιακή συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια κλειστή καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με μήκος L και παράμετρο το μήκος τόξου καλείται <u>απλή</u> αν-ν $c|_{[0,L)}$ είναι 1-1

ΘΕΩΡΗΜΑ Ο αριθμός περιστροφής κάθε απλής κλειστής καμπύλης είναι ± 1.

(H. Hopf $\approx$ 1930)

ΛΗΜΜΑ Έστω $F:[a,b]\to S^1$ συνεχής συνάρτηση

$$F(x) = (u(x), v(x)), \quad x\in[a,b]$$

$$u^2(x)+v^2(x)=1.$$

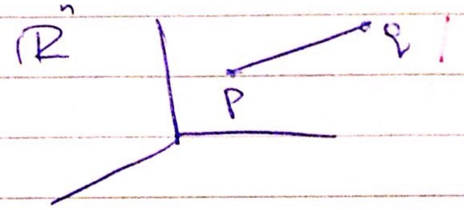
Τότε υπάρχει γωνιακή συνεχής συνάρτηση $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε

$$F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x))$$

Επιπλέον η $\phi(x)$ καθορίζεται από την τιμή σε ένα $x_0\in[a,b]$

Θέλω μια επέκταση του λήμματος.

Υπενθύμιση: Ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^n$

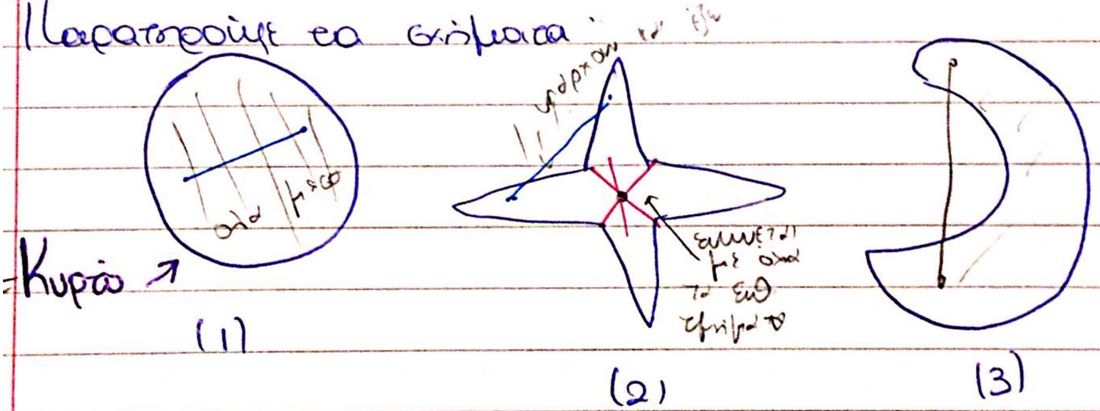


Το ευθ. τμήμα με άκρα p, q είναι το σύνολο

$$\{\underbrace{tq+(1-t)p}\ /\ t\in[0,1]\}$$

αν το γράψω $p+t(q-p)$ έχω την εξίσωση της ευθείας αν περιορίσω το t έχω ευθ. τμήμα.

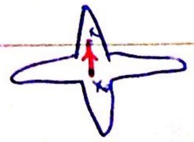
Παρατηρούμε τα σχήματα:



Ένα ευθ τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ είναι κυρτό (?)

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα υποσύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ καλείται αστερόσχημο αν-ν υπάρχει $x_0\in A$ τ.ω. $\forall x\in A$, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x_0, x περιέχεται στο A, δηλαδή

$$tx+(1-t)x_0\in A, \ \forall x\in A, \forall t\in[0,1]$$



$F(x) = (u(x), v(x))$

<u>ΛΗΜΜΑ</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ αστεροσχήμο και $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to S^1$ συνεχής.
Τότε υπάρχει συνεχής $\phi: A \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x)), \quad \forall x \in A.$$

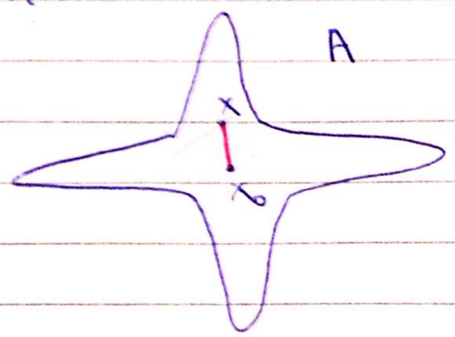
Επιπλέον η $\phi(x)$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε ένα $x_0 \in A$.

Αυτό καλούμαστε ν' αποδείξουμε. Για $n=1$ την έχουμε είναι (ΛΗΜΜΑ)

<u>Απόδειξη</u>

Για $n=1$ είναι γνωστό.

Έστω $n \neq 1$



Για κάθε $x \in A$ ορίζω την απεικόνιση $e_x : [0,1] \to S^1$

$$e_x(t) = F(tx + (1-t)x_0).$$

Η e_x είναι συνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $e_x(t) = (\cos\phi_x(t), \sin\phi_x(t))$, $\forall t \in [0,1]$.

$$\iff \underbrace{F(tx + (1-t)x_0)}_{\text{εγώ θέλω } F(x) \text{ = μοναδικό. } t=1} = (\cos\phi_x(t), \sin\phi_x(t))$$

Για $t=1$: $F(x) = (\cos\phi_x(1), \sin\phi_x(1))$

Ορίζω τη συνάρτηση $\phi: A \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \phi_x(1)$$

Προφανώς ισχύει $F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x))$

<u>Γιατί η ϕ είναι συνεχής;</u> (Αυτό είναι το ζουμί!)

Αρκεί ν.δ.ο. για y κοντά στο x το $\phi_y(1)$ είναι κοντά στο $\phi_x(1)$.

Για την κατασκευή της $\phi_x(t)$ θεωρούμε διαμέριση (αρκετά πυκνή) $\{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1\}$ ώστε $e_x([t_i, t_{i+1}]) \subseteq$ ένα εκ των 4 ημικυκλίων.

$$\phi_x(t) = \arctan \frac{e_x^{(t)}{}_{,2}}{e_x^{(t)}{}_{,1}} + 2k\pi \quad \text{αν} \quad e_x([t_i, t_{i+1}]) \subset S_f \;?$$

$$\phi_x(t) = \arctan \frac{v(\ldots)}{u(\ldots)} + 2k\pi$$ [illegible]

λόγω συνέχειας της F μπορώ να υποθέσω ότι για y ισχύει όσο x έχω επίσης ότι $e_y([t_i, t_{i+1}]) \subset S'$

$$\begin{cases} \phi_x(1) = \arctan \dfrac{v(x)}{u(x)} + 2k\pi \\ \phi_y(1) = \arctan \dfrac{v(y)}{u(y)} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_x(1) - \phi_y(1) = \arctan \frac{v(x)}{u(x)} - \arctan \frac{v(y)}{u(y)}$$